



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CAMPUS RECIFE
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS**

Alexandre Bezerra dos Santos

**SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E MATRIZES NA MODELAGEM DE
CADEIAS PRODUTIVAS**

Trabalho Acadêmico de Graduação em Ciências Econômicas da Universidade Federal de Pernambuco submetido como 2º Exercício Escolar da Disciplina de Elementos de Economia Matemática II, ministrada pelo Prof. Dr. Alexandre Stamford da Silva.

Recife

2022

RESUMO

Este trabalho traz uma leitura conceitual simples e aplicada de Sistemas de Equações Lineares e suas formas Matriciais, tendo em vista embasar a formalização do Modelo Insumo-Produto de Leontief. Expõe, resumidamente, o processo percorrido em um trabalho acadêmico de pesquisa econômica aplicada, que trata um caso complexo e real das relações interindustriais das cadeias produtivas regionais do Estado de Pernambuco; e, expandido a compreensão e a aplicabilidade do modelo de Leontief, traz também uma dissertação de mestrado, que aplica Modelos de Equilíbrio Geral Computáveis na análise de efeitos dos investimentos na indústria de insumos energéticos, tratados de maneira endógena, na emissão de gases que provocam o efeito estufa. Conclui, refletindo sobre o leque de possibilidades de planejamento eficiente e responsável que se abre, dado as novas demandas globais.

Palavras-chave: SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES. MATRIZES. MATRIZ INSUMO-PRODUTO. EQUILÍBRIO GERAL COMPUTÁVEL.

INTRODUÇÃO

O diagnóstico e a intervenção na realidade, seja ela física, biológica ou social, pressupõem um conhecimento aprofundado dela; e cientes disto, os cientistas desenvolvem modelos que, reunindo o máximo de determinantes de seu objeto, o simplificam. Desta forma, os vários elementos que constituem o fenômeno analisado coexistem e se relacionam num todo integrado e complexo denominado sistema; estando também este, sujeito à estímulos externos, os chamados fatores exógenos.

Assim, pode-se empiricamente, projetar sistemas físicos, manipular suas variáveis, e observar como eles se comportam; é possível alterar os seus parâmetros, por tentativa e erro, até alcançar desempenhos satisfatórios. No entanto, no caso de sistemas demasiadamente complexos, de manipulação custosa e perigosa, como nas áreas da biologia e da economia, por exemplo, métodos analíticos tornam-se indispensáveis; nas etapas de modelagem e de teste, ganham primazia as descrições matemáticas e experimentos estatísticos.

Ademais, após esta sofisticação metodológica, ficou claro que a eficiência e abrangência do modelo depende de uma construção teórica adequada, da reunião de informações essenciais e previsão de suas restrições, de modo a reduzir as divergências entre as previsões e os resultados dos testes. Em modelos econômicos, predominantemente, os princípios microeconômicos, as funções de produção, as variáveis macroeconômicas – juros, inflação, emprego e renda -, as regras institucionais (regime político e jurídico), e costumes culturais, restringem a performance do sistema. De modo a exemplificar, é evidente como as condições político-sociais do Brasil limitam a aplicação de políticas econômicas contracionistas e outras que incentivem um crescimento da poupança nacional, de acordo com modelos de crescimento de longo prazo, como o de Solow. Outro exemplo, é como o desempenho da indústria nacional é dependente do financiamento estatal e restrições de mercado, e impactou o bem-estar do consumidor negativamente, e desperdiçou-se recursos públicos; etc. Portanto, informações são cruciais para a elaboração de um bom modelo explicativo e de previsão; e, a evolução das tecnologias de Data Science tem muito a agregar aos antigos modelos e vem revolucionar as metodologias científicas.

Neste trabalho ficará claro, a importância dos sistemas lineares e suas formas matriciais como bases de modelos analíticos sofisticados e abrangentes.

CAPÍTULO 1: SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E MATRIZES

Segundo o conceito sucintamente proposto na introdução, um sistema representa um objeto pelo conjunto de suas informações, que podem ser colocadas em forma de equações polinomiais, organizadas em um sistema de equações lineares. Tomando a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Este sistema linear armazena k informações de n variáveis básicas do modelo, ou k relações entre os n fatores, que servem como restrições aos valores possíveis; e para isso, o conjunto solução será um vetor composto dos valores de x_i que satisfazem todas as k restrições ao mesmo tempo.

Porém, a existência desse conjunto solução depende dos valores dos parâmetros a_{kn} , podendo o sistema ter soluções ou não, dito de outra forma, ser possível ou impossível; e, caso tenha solução possível, ela pode ser uma solução única ou haver infinitas soluções, ou seja, determinado ou indeterminado.

No processo de resolução de um sistema linear é indispensável reescrevê-lo na forma de equações matriciais. Assim, sendo A, a matriz dos coeficientes (ou parâmetros), x, o vetor solução, e B, a matriz das restrições:

$$Ax = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$$

Antes de calcular as soluções, é preciso descobrir se existem soluções possíveis. Para isso, expandimos a matriz dos coeficientes adicionando a coluna de restrições B, e a escalonamos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} & b_k \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_k \end{array} \right]$$

O Posto ou Rank de uma matriz é muito importante no processo de classificação. Calcula-se ela subtraindo dos números de variáveis (n) o total de linhas zeradas após o escalonamento. Se o posto da matriz dos coeficientes for menor do que o posto da matriz escalonada, o sistema não tem solução possível, pois

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_k \end{array} \right], \text{ sendo } c_k \neq 0$$

Logo, $0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n \neq 0$ é inconsistente e, portanto, o sistema é impossível.

Se não for impossível, os postos serão necessariamente iguais, e então existem soluções para o sistema. E a próxima etapa vai ser descobrir se é determinado ou indeterminado.

Para ser determinado, o posto da matriz escalonada tem que ser igual ao número de variáveis:

$$P(M_A) = n \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = c_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + \cdots + 1 \cdot x_n = c_k \end{cases}$$

$$\therefore S = \{x_1 = c_1, \dots, x_n = c_k\}$$

Senão, $P(M_A) < n$, o sistema tem infinitas soluções.

E o que isso significa metodologicamente?

Se um modelo tem mais variáveis que informações sobre elas, significa que existem não está no todo fechado, tem $GL = n - P(M_A)$ graus de liberdade, e, portanto, a solução é considerar as GL variáveis a mais como exógenas, logo, constantes. A escolha de quais serão elas, é arbitrária, e depende dos objetivos do modelo.

Para melhor assimilar os conceitos, pode-se resolver um problema de determinação de preços de equilíbrio, baseados em um modelo econômico de produção elaborado pelo economista russo Wassily Leontief, que utiliza métodos matriciais para estudar a relação entre diferentes setores da economia.

Neste modelo fechado temos n indústrias, e cada uma produz uma quantidade fixa de um insumo usado pelas n indústrias. E, o objetivo é definir os preços dos produtos de modo que o total de gastos seja igual ao total recebido. Na tabela abaixo, as linhas representam as vendas e as colunas compras.

	Energia	Carvão	Ferramenta
Energia	2	4	2
Carvão	3	3	2
Ferramenta	2	2	4

Para satisfazer a condição de equilíbrio, a oferta total tem que ser igual demanda total, alcançada pelo mecanismo de ajuste de preços, como num mercado perfeitamente competitivo. Logo, a restrição orçamentária de cada indústria é igual aos seus custos de produção. Ou seja, $\sum_n Q_{ni} \cdot x_n = \sum_n q_{in} x_i$. Logo,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -6 & 4 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -6 & 4 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Podemos chamar x_3 de β , pois é o parâmetro que multiplica ambos os preços, mantendo o equilíbrio.

$$\rightarrow S = (\beta, \beta, \beta) = \beta(1,1,1)$$

Logo, para que se alcance o equilíbrio entre receita e gastos nesse sistema os preços dos produtos devem ser iguais. Logo, se o preço da energia aumenta em β , os outros preços devem aumentar na mesma proporção.

Vide que transformar as equações em matrizes é torna operação muito mais fácil. Pois, imagine um modelo com n empresas, quanto maior n , maior fica o sistema com que abrimos o capítulo.

E, é a utilização para resolva problemas reais, e, portanto, mais complexos, que será trabalhada nos trabalhos acadêmicos abordados nos próximos capítulos.

CAPÍTULO 2: UTILIZAÇÃO EM TRABALHOS ACADÊMICOS

Este capítulo traz um resumo de dois artigos acadêmicos que instrumentalizam sistemas lineares e matrizes para resolução de modelos econômicos, seguindo a mesma metodologia de mensuração de atividades econômicas de cadeias produtivas do exemplo dado no capítulo anterior. Neles, junto com ferramentas estatísticas e dados fornecidos por órgãos de pesquisa como o IBGE, calcula-se coeficientes e parâmetros de calibração de modelos, de modo a torná-lo mais assertivos, e índices de atividade econômica. Visando auxiliar o processo de tomada de decisões pelos produtores e prestadores de serviços, e pelo Estado.

CAPÍTULO 2.1: CONFECÇÃO DE MATRIZ INSUMO-PRODUTO DE PERNAMBUCO

O primeiro artigo escolhido, “Matriz de Insumo-Produto de Pernambuco para 1999: Metodologia de Cálculo e Subsídios ao Planejamento Regional”, desenvolvido pelo Instituto de Pesquisas Sociais Aplicadas (IPSA), objetivou a preparação de um arcabouço metodológico que racionalizasse o planejamento de políticas públicas tendo em vista o setor econômico regional do estado pernambucano.

Diferente do modelo minimalista abordado no capítulo anterior, o sistema trabalhado aqui é um modelo aberto que abrange, além das demandas intersetoriais, demandas externas, como gastos governamentais e privados, formação bruta de capital fixo, variação de estoques e exportações. Ademais, são adicionados outros elementos que complexificam o modelo: os impostos, o valor adicionado e seus componentes, importações etc.

Assim, o artigo evidencia, na sua confecção, a possibilidade de estimar uma série de indicadores de interação entre os setores, dos impactos sobre o emprego, a renda e o valor adicionado, devido a alterações de demanda interna e externa e mudanças tecnológicas, utilizando as informações macroeconômicas.

Nesse sentido, para uma análise da economia pernambucana, foram selecionados alguns setores-chaves dentre os 36 grupos de atividades econômicas e 63 grupos de produtos, elencados pelo IBGE, para compor o modelo; e, construiu-se a Tabela de Recursos e Usos – TRU, que lista os componentes da oferta total de bens e serviços, inclusos produção local e importações, utilizando vetores (matrizes) contendo margens de distribuição, impostos, valor da produção e importações. Contudo, foram necessárias algumas técnicas estatísticas de balanceamento para equilibrar valores de oferta e demanda. E, após a coleta e tratamento de todos esses dados, foi possível calcular a matriz dos coeficientes técnicos diretos a partir de outra, a matriz de consumo intermediário de origem doméstica, que reúne as participações dos insumos produzidos pelos setores na composição do produto deles. Assim, pode-se calcular a matriz de Leontief, que é a matriz de impacto setorial.

Depois de seguidos todos esses procedimentos, chegou-se a um extenso conjunto de indicadores macroeconômicos do Estado de Pernambuco. Do grupo de indicadores síntese, calculou-se os índices de ligações para trás, que medem o aumento da produção de um setor dado o aumento unitário da demanda final total, e, portanto, indica o quanto ele demanda de outros setores; e, os índices de ligações para frente, que mensura o aumento total da produção de todos os setores dado o aumento da demanda final de um deles, ou o quanto ele é demandado pelos outros setores. Os setores de Serviços, a Indústria de Açúcar e a Agropecuária se mostraram os mais dinâmicos, e de forte encadeamento para trás e para frente. Depois, encontrou-se os multiplicadores de impacto total, direto, indireto e efeito-renda, que medem o efeito de um choque na demanda final de cada setor sobre o valor adicionado, emprego e rendimento; os setores Agropecuária, Madeira e Mobiliário e fabricação de Artigos do Vestuário e Acessórios se destacaram como de maior impacto sobre os três indicadores, e, portanto, o investimento deve ser voltado para eles.

Assim, o trabalho conclui demonstrando a praticidade da elaboração e utilidade das informações extraídas de uma matriz insumo-produto. A informação é crucial no processo de decisão ótima pelos agentes econômicos.

CAPÍTULO 2.2: ESTUDO DE EMISSÕES DE CO₂ PELO SETOR DE ENERGIA

O segundo trabalho selecionado, "Impactos dos investimentos no setor energético brasileiro sobre as emissões de CO₂: uma abordagem de equilíbrio geral computável", é uma dissertação de mestrado que, utiliza métodos mais avançados de análise de sistemas econômicos, baseado em teorias econômicas sofisticadas, que é o Modelo de Equilíbrio Geral Computável (EGC), para estimar os efeitos do aumento de investimentos no setor de produção de energia sobre emissões de carbono e outras variáveis econômicas importantes.

Entre os dois principais métodos quantitativos de pesquisa nas Ciências Econômicas, o MEGC se mostrou o mais adequado, pois a metodologia econométrica demanda uma extensa quantidade de informações e variáveis, que dificultam a modelagem. O ECG permite reunir um conjunto de equações, não necessariamente lineares, mas linearizáveis, para descrever a produção e alocação de bens por meio de um sistema de preços relativos, seguindo a teoria Walrasiana; na qual, é possível encontrar um vetor de preços de equilíbrio - como foi feito no minimodelo do capítulo anterior - que anula o excesso de demanda. Ademais, por realizar

análises ex ante, pode-se simular cenários que ainda não aconteceram com base em dados de um ano de referência. E, ele mesmo se subdivide em modelos estáticos, que não consideram a passagem do tempo, e os métodos dinâmicos: intertemporal, baseado na teoria do crescimento ótimo; e sequencial, onde uma série de modelos estáticos são ligados pelas atualizações das variáveis endógenas e exógenas. Em suma, amplia o modelo de Leontief pois permite ser levado em conta a capacidade instalada das indústrias, e "endogenizar" as variáveis preço e investimento.

Posto isso, a preocupação com a nocividade das emissões do dióxido de carbono sobre o meio-ambiente e bem-estar dos agentes econômicos, junto com as evidências de correlação positiva entre elas e crescimento econômico - bastante explorada pelo trabalho - torna imperioso modelar quantitativamente os impactos da expansão dos setores produtores de insumos energéticos. Para isso, o autor utilizou um MEGC do tipo dinâmico sequencial para simular o comportamento macroeconômico antes e depois de aumentos no investimento e de introdução de impostos sobre as emissões. A partir de padrões de MEGCs ambientais desenhou-se equações tecnológicas, de utilidade das famílias e de produtividade do trabalho, como função do nível de poluição. E, quantificou-se os efeitos da introdução nos preços dos insumos energéticos de impostos e subsídios, com políticas de correção de falhas de mercado, objetivando explicitar os custos das externalidades negativas e, portanto, as implicações sobre a eficiência do produtor e o bem-estar dos consumidores. Utilizando a Matriz de Contabilidade Social e dados das Contas Econômicas Integradas, calculou-se os coeficientes de emissões de dióxido de carbono, e classificou-se os produtos entre “sujos” e “limpos”. E calibrou-se o modelo tendo por referência dados do ano de 2006. E por fim, fez-se um teste de homogeneidade, que consiste em multiplicar o numerário por um número real positivo qualquer, de modo que, as variáveis nominais mudem na mesma proporção, contudo, as variáveis reais permaneçam inalteradas.

A partir do resultado das simulações, concluiu-se que a aceleração do processo de acumulação de capital traz consequências para o crescimento econômico, embora, no curto prazo, o resultado não seja necessariamente elevação do PIB, pois o financiamento dos investimentos pelo aumento da poupança externa resultou em alta do câmbio, e então, redução das exportações líquidas. Houve um aumento dos investimentos destinados a produção de energia “suja”, gerando uma escalada das emissões de dióxido de carbono. Ademais, constatou-se que a adoção de impostos ambientais desacelerou o processo de acumulação de capital.

A simulação de ambientes econômicos, internalizados no modelo medidas de bem-estar, são formas ótimas de avaliar políticas públicas.

CAPÍTULO 3: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os acontecimentos em escala global dos últimos anos, como a pandemia de COVID-19 e a guerra entre Rússia e Ucrânia, potencializou um processo de desglobalização relativa, dada a desestabilização das cadeias globais de valor. Aliás, a crise sanitária pela qual o mundo passou denuncia a intervenção e uso irresponsável do mundo natural por parte do homem, que produz consequências mais rapidamente e mais catastróficas, que a lenta, mas já sentida, poluição atmosférica. Logo, crescem as demandas por modelos de produção que, dado o ‘tradeoff’ entre

eficiência e resiliência, recalcule as cadeias de produção, de modo a prever e sobreviver aos choques de oferta; e, que poluem menos, utilizando fontes mais limpas de energias, e soluções de economia sustentável.

Os métodos quantitativos de estudo destas ligações intersetoriais que tem por base o modelo de Leontief são indispensáveis, e devem ser generalizados nos processos de planejamento produtivo. Os modelos de equilíbrio geral de Walras, já considera as premissas de maximização de lucro das empresas e da utilidade das famílias, e, portanto, soluções de EGC podem ser aperfeiçoadas para prever sustentabilidade ambiental e possibilidades de crises, e então serem instrumentos racionais de planejamento de negócios. O poder de impacto dessas otimizações sobre a eficiência e bem-estar, conforme demonstrado no segundo artigo, devem pesar na escolha.

Ademais, a racionalização dos processos de escolha por meio da adoção de modelos de planejamento quantitativo não se restringe aos setores institucionais privados. O setor público, responsável pelas políticas econômicas, sejam legais, fiscais ou monetárias, e públicas – desenvolvimento regional, incentivo social -, necessita, especificamente no caso do Brasil, enrijecer o processo decisório com critérios técnicos. De posse desses instrumentos, é possível modelar conjunturas econômicas específicas para considerar ou não determinados investimentos – como tentou-se classificar no primeiro trabalho -, estabelecer metas e prazos; pois o recurso público também é escasso e não deve ser desperdiçado.

REFERÊNCIAS

- HEFEZ. Abramo; Fernandez. Cecília S. Introdução à Álgebra Linear. [S.l.]: SBM, 2016.
- CHEN, Chi-Tsong. Linear System Theory and Design, 3rd ed. Oxford: Oxford University Press, 1999.
- Costa, Ecio de Farias et al. Matriz de insumo-produto de Pernambuco para 1999: metodologia de cálculo e subsídios ao planejamento regional. *Economia Aplicada* [online]. 2005, v. 9, n. 4 [Acessado 7 Outubro 2022] , pp. 595-621. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1413-80502005000400005>>. Epub 13 Fev 2006. ISSN 1980-5330. <https://doi.org/10.1590/S1413-80502005000400005>.
- VIANA, Jorge Henrique Norões. Impactos dos investimentos no setor energético brasileiro sobre as emissões de CO₂: uma abordagem de equilíbrio geral computável. 2011. 105 f. Dissertação (Mestrado em Economia) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2011.
- BERGMAN, L. The development of computable general equilibrium modeling. in: BERGMAN, L; JORGENSON, D.W; ZALAI, E. (eds). General equilibrium modeling and economic policy analysis. Oxford: Basil Blackwell. 1990.