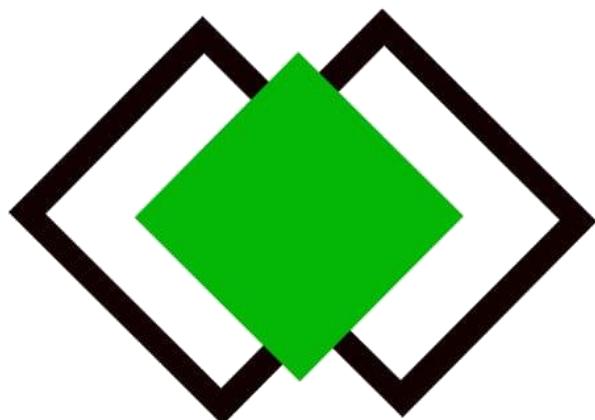


BANCO DE QUESTÕES OLÍMPICAS



PROF. RAFAEL SOUZA
Professor de Matemática

FUNÇÕES

“Com abelhas ou sem abelhas, os problemas interessantes da Matemática têm, para o pesquisador, a doçura do mel.”



(Ary Quintela)

APRESENTAÇÃO

Se preparar para competições de matemática não é uma tarefa fácil, os problemas são mais desafiadores e totalmente diferentes dos exercícios vistos em sala de aula, sem falar que, até para o professor que pensa em inserir problemas olímpicos em suas aulas, se torna uma tarefa complicada, pois terá que fazer investigações de problemas e resolve-las para inserir em suas aulas, e isso leva um tempo.

Na preparação de alunos para competições, utilizamos as provas de edições anteriores, o que é uma boa ideia, pois o aluno vai compreendendo a sistematica da competição. Porém ter um banco temático, nos auxilia focar em tópicos e conhecer características comuns em problemas de diversas competições, e não apenas de uma em especial, pois a ideia é nos preparar para competições e não apenas uma.

Na matemática, a melhor maneira de se preparar é praticando, resolvendo problemas, conhecendo padrões e com isso, desenvolvendo nossas criatividade, o que é muito importante para competições em matemática, o pensamento criativo, fugir do pensamento coletivo.

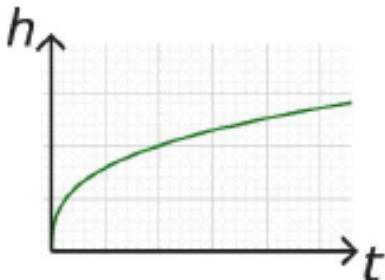
Sendo assim, esse é o primeiro dos bancos de questões, temáticos que organizo, nele encontramos problemas da OBMEP, Canguru de Matemática entre outras competições, para que possamos nos preparar e trabalhar com nossos alunos, sendo mais facil encontrar os problemas filtrados.

Divirtam-se!

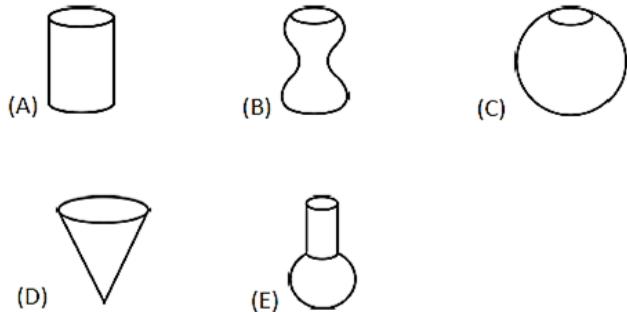
QUESTÕES OLÍMPICAS

- Q.1.** (OBMEP 2019 1º Fase) Uma função f é tal que $f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ para todo número real x diferente de 0 e 1. Qual é o valor de $f(3)$?
- a) 1/4 b) 1/5 c) 1/6
 d) 1/7 e) 1/8

- Q.2.** (Canguru de Matemática 2018 N.S) Um vaso é enchido com um fluxo constante de água até sua borda. O gráfico abaixo mostra a altura h da água no vaso em função do tempo t .



Qual das formas abaixo pode representar esse vaso?



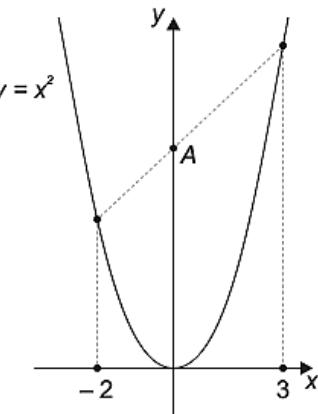
- Q.3.** (Canguru de Matemática 2018 N.S) Se $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ e se $f(1) = \frac{1}{2}$, quanto é $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$?

- a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{5}{2}$
 d) $\frac{15}{8}$ e) 6

- Q.4.** (Canguru de Matemática 2018 N.S) O gráfico da função definida por $f(x) = x^2 + px + q$ corta os eixos coordenados em três pontos distintos. A circunferência que passa por esses pontos intersecta o gráfico da f num quarto ponto. Qual é esse ponto?

- a) $(0; -q)$ b) $(p; q)$ c) $(-p; q)$
 d) $(-\frac{q}{p}; \frac{q^2}{p})$ e) $(1; p + q + 1)$

- Q.5** (OBMEP 2018 1º Fase) A figura mostra o gráfico da função definida por $y = x^2$. O ponto A tem coordenadas $(0, p)$. Qual é o valor de p ?



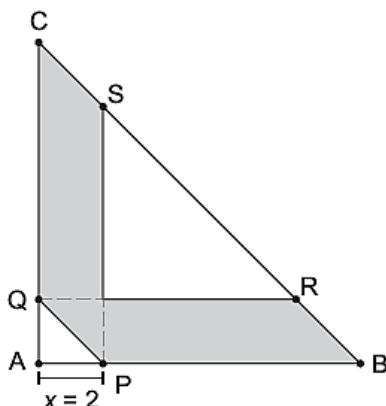
- a) 5 b) 5,5 c) 6
 d) 6,25 e) 6,5

- Q.6.** (OPIM 2019 1º Fase) Considere uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(y + f(x) - 1) = y + 3 + x$ para quaisquer x, y reais. Qual das alternativas abaixo é a correta?

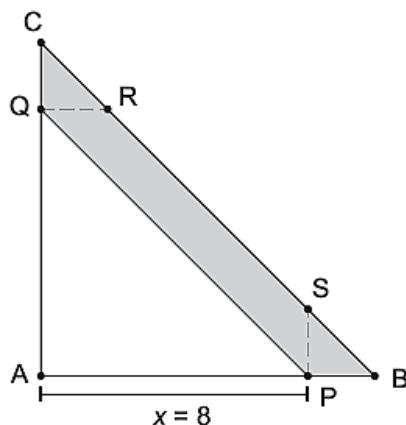
- a) f não é injetiva.
 b) f é uma função quadrática.
 c) f não é uma função sobrejetiva.
 d) f é uma função afim.
 e) $f(x) + x = f(0) + 1$ para qualquer x real.

Q.7. (OBMEP 2018 2º Fase) O triângulo retângulo ABC tem catetos de medidas $AB = 10$ e $AC = 10$. O ponto P sobre o lado AB está a uma distância x de A . O ponto Q sobre o lado AC é tal que PQ é paralelo a BC . Os pontos R e S sobre BC são tais que QR é paralelo a AB e PS é paralelo a AC . A união dos paralelogramos $PBRQ$ e $PSCQ$ determina uma região cinza de área $f(x)$ no interior do triângulo ABC .

a) Calcule $f(2)$.



b) Calcule $f(8)$.



c) Encontre a expressão de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 10$.
d) Para qual valor de x a área $f(x)$ é máxima?

Q.8. (OPRM 2019 1º Fase) Sejam a e b raízes distintas da função real $f(x) = 2019x^{2019} + 2019x - 4038$. Qual é o valor de $(a + b)^{2019}$?

- a) -1 b) 1 c) 2^{2019}
d) -2^{2019} e) -2019^{2019}

Q.9. (OPIM 2018 1º Fase) Um artista plástico consegue fazer durante um mês no máximo 50 quadros. Sabendo que o preço de custo para fazer cada quadro é de R\$ 50 e que se o artista consegue fazer x quadros durante um mês, então o seu preço de venda é de R\$ $100 - x$ sendo que uma quantidade menor de quadros para fazer implica em melhor qualidade e consequentemente em um melhor preço. Determine quantos quadros este artista deve produzir durante um mês para obter o lucro máximo?

- a) 15 b) 20 c) 25
d) 30 e) 45

Q.10. (OPRM 2019 1º Fase) Uma função real satisfaz

$$xf(10 - x) - f(x) = x^2 - 5.$$

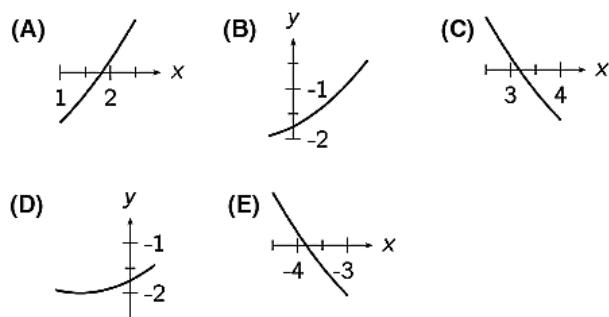
Quanto vale $f(1)$?

- a) -9 b) -2 c) 0
d) 2 e) 9

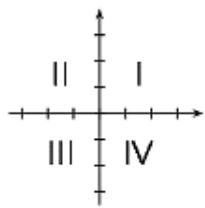
Q.11 (OPRM 2019 1º Fase) Seja f a função definida por $f(t) = t + a^t + b^t$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Se $f(1) = 6$ e $f(3) = 93$, quanto vale $f(2)$?

- a) $\frac{53}{3}$ b) $\frac{67}{3}$ c) $\frac{89}{3}$
d) $\frac{95}{3}$ e) $\frac{87}{2}$

Q.12. (Canguru de Matemática 2017 N.S) Quatro dos gráficos parciais mostrados a seguir são partes do gráfico de uma mesma função quadrática. Qual dos cinco gráficos não é parte do gráfico dessa função?



Q.13. (Canguru de Matemática 2017 N.S) Qual quadrante não contém pontos do gráfico da função afim $f(x) = -3,5x + 7$?



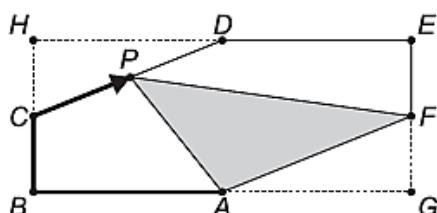
Q.14. (Canguru de Matemática 2017 N.S) Qual das funções a seguir tem seu gráfico com o maior número de pontos de intersecção com o gráfico da função $f(x) = x$?

- a) $g_1(x) = x^2$ b) $g_2(x) = x^3$ c) $g_3(x) = x^4$
 d) $g_4(x) = -x^4$ e) $g_5(x) = -x$

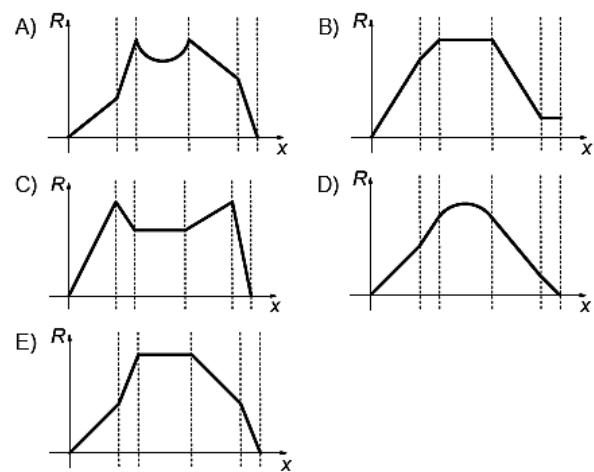
Q.15. (OBMEP 2017 1º Fase) Se $f(x) = 5x^2 + ax + b$, com $a \neq b$, $f(a) = b$ e $f(b) = a$, qual é o valor de $a + b$?

- a) -5 b) $-\frac{1}{5}$ c) 0
d) $\frac{1}{5}$ e) 5

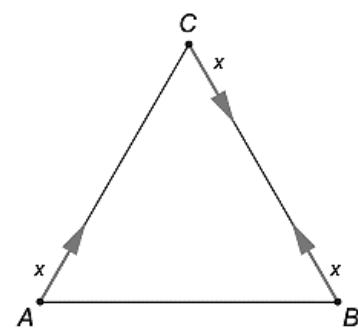
Q.16. (OBMEP 2017 1º Fase) Na figura abaixo, $BHEG$ é um retângulo com $BG > BH$, e A, C, D, F são pontos médios de seus respectivos lados. Um ponto P desloca-se ao longo da poligonal $ABCDEF$, partindo de A até o ponto F .



Qual é o gráfico que melhor representa a área $R(x)$ do triângulo APF em função da distância x percorrida pelo ponto P ao longo dessa poligonal?

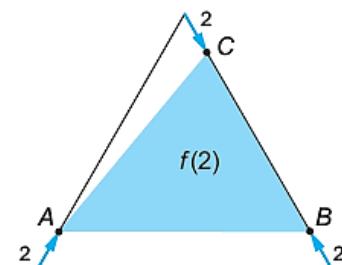


Q.17. (OBMEP 2017 2º Fase) O triângulo da figura abaixo é equilátero e seus lados medem 10 cm. Os pontos A , B e C , inicialmente nos vértices do triângulo, deslocam-se sobre seus lados, de um vértice a outro, com a mesma velocidade. Os pontos A e C deslocam-se no sentido horário, e o ponto B desloca-se no sentido anti-horário.



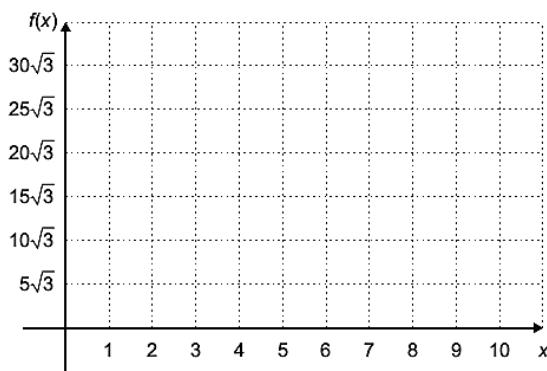
Seja x a distância em centímetros percorrida pelos pontos A , B e C , no intervalo $0 \leq x \leq 10$. Seja $f(x)$ a área do triângulo ABC quando x é tal que A , B e C formam um triângulo e $f(x) = 0$, caso contrário.

- a) Calcule $f'(2)$.



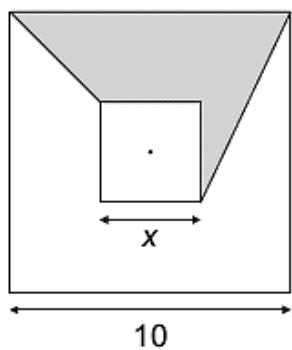
- b) Para quais valores de x , $0 \leq x \leq 10$, tem-se $f(x) = 0$?

c) Esboce o gráfico de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 10$.



Q.18. (OBMEP 2016 1º Fase) Uma função f é tal que $f(1 - x) + 2f(x) = 3x$, para todo x real. Qual é o valor de $f(0)$?

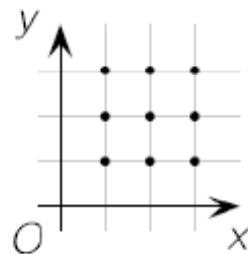
Q.19. (OBMEP 2016 1º Fase) Os quadrados da figura têm lados paralelos e o mesmo centro. O quadrado maior tem lado 10 e o menor tem lado x . Qual é o gráfico que expressa a área da região cinza em função de x ?



- The figure displays five graphs labeled A through E, each plotted on a Cartesian coordinate system with the x-axis labeled.

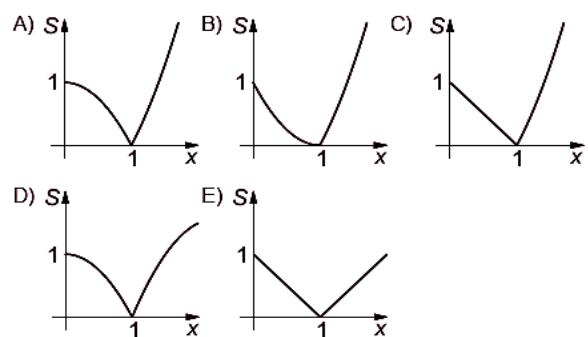
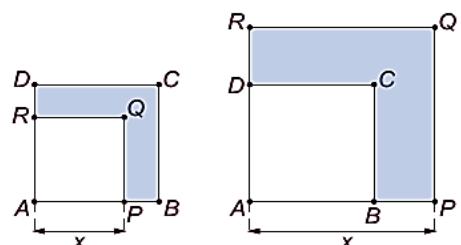
 - A)** A straight line with a negative slope, passing through the first and fourth quadrants.
 - B)** A curve starting at a positive y-intercept, increasing to a local maximum, then decreasing to a local minimum, and finally increasing again.
 - C)** A curve starting at a positive y-intercept, increasing with an increasing rate of change (concave up).
 - D)** A curve starting at a positive y-intercept, decreasing with an increasing rate of change (concave down).
 - E)** A curve starting at a positive y-intercept, decreasing with a decreasing rate of change (concave up).

Q.20. (Canguru de Matemática 2016 N.S) Quantas funções quadráticas de variável x têm seu gráfico passando por pelo menos três dos pontos assinalados no plano xOy ao lado?



Q.21. (Canguru de Matemática 2015 N.S.) O eixo Ox e os gráficos das funções $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = x^2 - 1$ dividem o plano cartesiano em quantas regiões?

Q.22. (OBMEP 2015 1º Fase) Um quadrado ABCD tem área 1. Um ponto P deslocasse ao longo da semirreta AB, partindo do ponto A para a direita, conforme mostra a figura. Se S é a área da região compreendida entre os quadrados ABCD e APQR, destacada em cinza, qual é o gráfico que melhor representa a variação de S em função de x ?

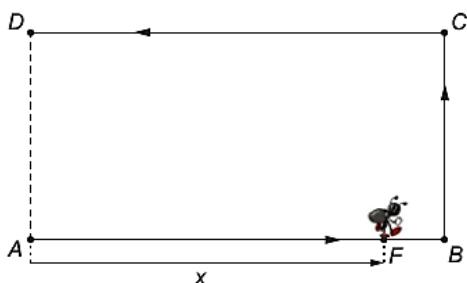


Q.23. (TVM Liceu 2020 1ª Fase) Uma função g é tal que $g(1+x) = 2 \cdot g(x) - g(2 \cdot x)$, para todo número x real. Sabendo que $g(0) = 2$. Quanto vale

$$g(0) + g(1) + g(2)?$$

- | | | |
|------|------|------|
| a) 3 | b) 4 | c) 5 |
| d) 6 | e) 7 | |

Q.24. (OBMEP 2014 2º Fase) Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD. Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Após andar x centímetros, a formiga está em um ponto F do contorno.



- Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D?
- Calcule a área do triângulo ADF quando $x = 22$ centímetros.
- Qual é a maior área possível para um triângulo ADF?
- Esboce, no plano cartesiano Oxy, o gráfico da função que associa ao comprimento x o valor da área do triângulo ADF.

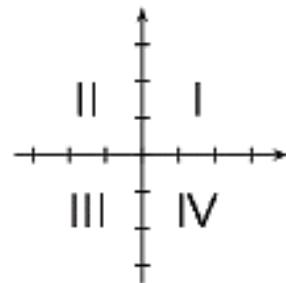
Q.25 (TVM Liceu 2020 1ª Fase) Um foguete da equipe de física do CEEP LICEU PARNAIBANO foi lançado na feira de ciências, partindo de uma origem, segundo um determinado referencial, onde percorreu uma trajetória parabólica. Sabendo que a função que representa essa parábola é

$$f(t) = -t^2 + 4t$$

Onde t representa o tempo em segundos após o lançamento e $f(t)$ a altura atingida pelo foguete em função do tempo. Qual foi a altura máxima atingida pelo foguete?

- | | | |
|--------|---------|--------|
| a) 2 m | b) 3 m | c) 4 m |
| d) 5 m | e) 16 m | |

Q.26. (TVM Liceu 2020 1ª Fase) Qual quadrante não contém pontos do gráfico da função afim $f(x) = 0,3x - 1$?



- | | | |
|-------|--------------------------------------|--------|
| a) I | b) II | c) III |
| d) IV | e) Todos os quadrantes contêm pontos | |

Q.27. (Canguru de Matemática 2014 N.S) A função $f(x) = ax + b$ satisfaz as igualdades $f(f(f(1))) = 29$ e $f(f(f(0))) = 2$. Quanto vale a ?

- | | | |
|------|------|------|
| a) 1 | b) 2 | c) 3 |
| d) 4 | e) 5 | |

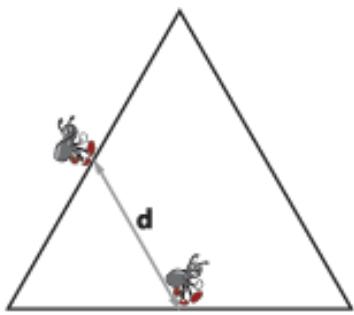
Q.28. (Canguru de Matemática 2014 N.S) A função $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfaz as condições $f(4) = 6$ e $xf(x) = (x-3)f(x+1)$. Qual é o valor de $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdots f(2011) \cdot f(2014)$?

- | | | |
|----------|-----------|----------------|
| a) 2013 | b) 2014 | c) 2013 · 2014 |
| d) 2013! | e) 20114! | |

Q.29. (Canguru de Matemática 2013 N.S) Seja f a função linear para o qual $f(2013) - f(2001) = 100$. Qual é o valor de $f(2031) - f(2013)$?

- | | | |
|--------|--------|--------|
| a) 75 | b) 100 | c) 120 |
| d) 150 | e) 180 | |

Q.30. (OBMEP 2013 1ª Fase) Duas formiguinhas partiram ao mesmo tempo e em direções diferentes de um mesmo vértice de um triângulo equilátero de lado 2 cm. Elas andaram sobre os lados do triângulo à velocidade de 1 cm/s, até retornar ao vértice inicial. Qual dos gráficos abaixo descreve a distância d entre as duas formiguinhas em função do tempo?



- A) cm

t	s
0	0
1	2
2	0
3	0
4	0
5	2
6	0

B) cm

t	s
0	0
1	1
2	2
3	2
4	1
5	0
6	0

C) cm

t	s
0	0
1	1
2	2
3	2
4	1
5	0
6	0

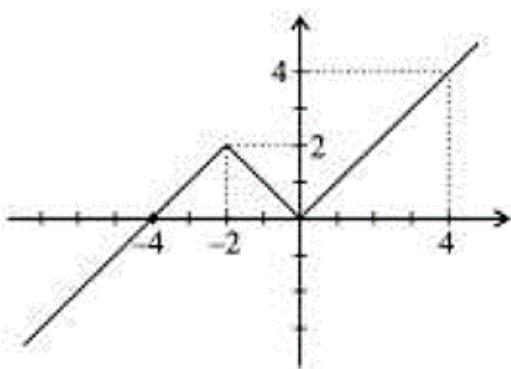
D) cm

t	s
0	0
1	1
2	2
3	0
4	2
5	0
6	0

E) cm

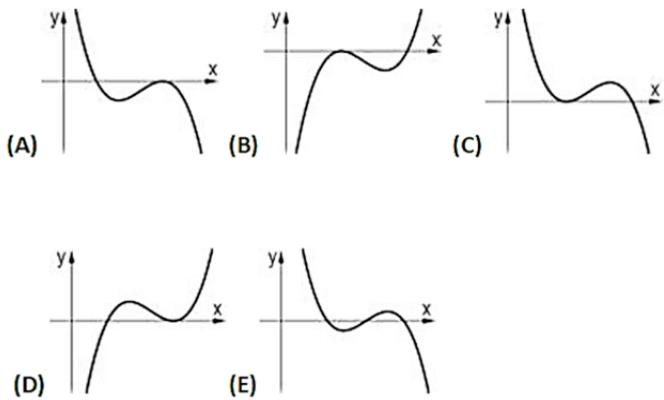
t	s
0	0
1	1
2	0
3	0
4	1
5	2
6	0

Q.31. (Canguru de Matemática 2013 N.S) Vera desenhou o gráfico de uma função $f:R \rightarrow R$, composto de duas semirretas e um segmento de reta. Quantas soluções tem a equação $f(f(f(x))) = 0$?



- a) 4
 - b) 3
 - c) 2
 - d) 1
 - e) 0

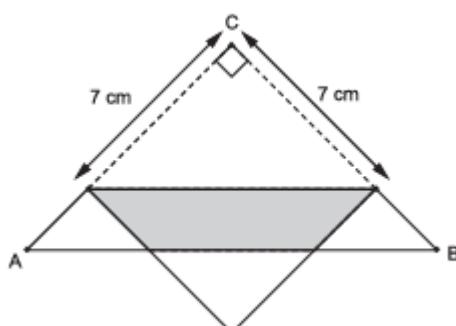
Q.32. (Canguru de Matemática 2013 N.S) O gráfico da função g dada por $g(x) = (a - x)(b - x)^2$, com $a < b$, está representado em uma das alternativas abaixo. Em qual delas?



Q.33. (Canguru de Matemática 2013 N.S) Seja $f:R \rightarrow R$ uma função com as seguintes propriedades: a) f é periódica de período 5; b) no intervalo $[-2,; 3[$, f é definida por $f(x) = x^2$. Qual é o valor de $f(2013)$?

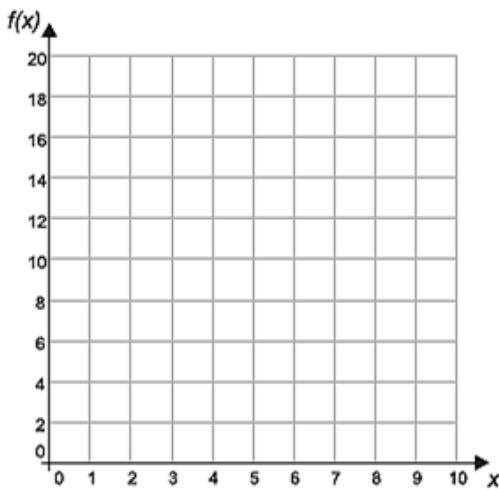
- a) 0
 - b) 1
 - c) 2
 - d) 4
 - e) 9

Q.34. (OBMEP 2013 2º Fase) A figura mostra um triângulo de papel ABC , retângulo em C e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número x tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam x cm do ponto C e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm^2 , da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em cm^2 , é $f(7)$.



- a) Calcule $f(2), f(5)$ e $f(7)$

- b) Escreva as expressões de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 5$ e $5 \leq x \leq 10$.
c) Faça o gráfico de $f(x)$ em função de x .



- d) Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

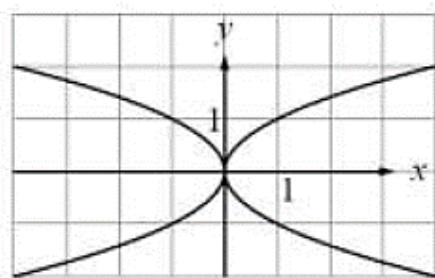
Q.35. (Canguru de Matemática 2012 N.S) Qual das funções a seguir satisfaz a equação

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$$

para todo x real não nulo?

- (A) $f(x) = \frac{2}{x}$ (B) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ (C) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$
 (D) $f(x) = \frac{1}{x}$ (E) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

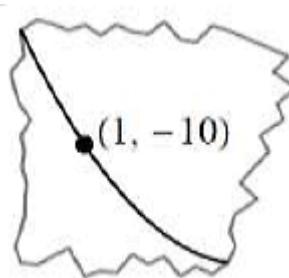
Q.36. (Canguru de Matemática 2011 N.S) Quantas funções a seguir têm como seu gráfico uma parte do gráfico abaixo?



$$y = x^2, y = -x^2, y = \sqrt{x}, y = -\sqrt{x},$$

$$y = \sqrt{-x}, y = -\sqrt{-x}, y = \sqrt{|x|}, y = -\sqrt{|x|}$$

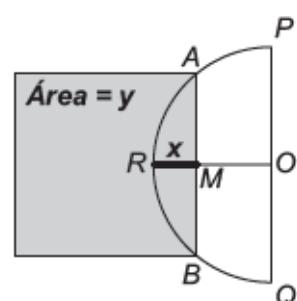
Q.37. (Canguru de Matemática 2011 N.S) O ponto $(1, -10)$ pertence à parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$. O desenho apresenta uma parte dessa parábola desenhada no plano cartesiano usual. Qual das afirmações abaixo pode ser FALSA?

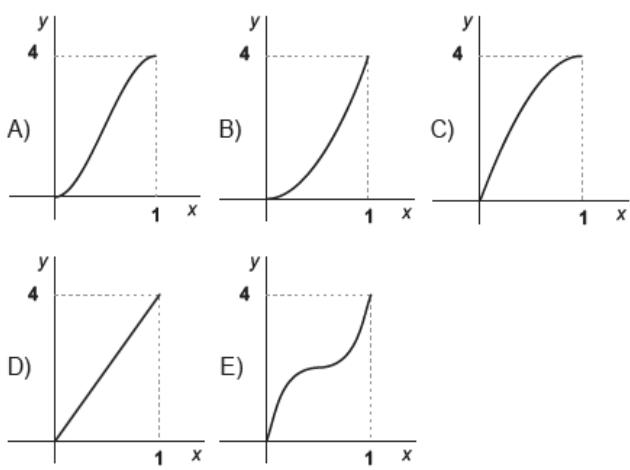


- a) $a > 0$ b) $b < 0$ c) $a + b + c < 0$
 d) $b^2 > ac$ e) $c < 0$

Q.38. (Canguru de Matemática 2011 N.S) A sequência de funções $f_1(x), f_2(x), \dots$ possui as seguintes propriedades (1) $f_1(x) = x$; (2) $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1-f_n(x)}$. Qual é o valor de $f_{2011}(2011)$?

Q.39. (OBMEP 2009 1ª Fase) O semicírculo da figura tem centro O e diâmetro $PQ = 2\text{ cm}$. O raio OR é perpendicular a PQ . Por um ponto qualquer M de OR traçasse a corda AB perpendicular a OR . Sejam x o comprimento de RM , em cm, e y a área do quadrado de lado AB , em cm^2 . Qual dos gráficos abaixo expressa a relação entre x e y ?





Q.40. (OBMEP 2009 2^a Fase) Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras 2 e 3, x indica a distância entre os vértices A e B dos dois triângulos.

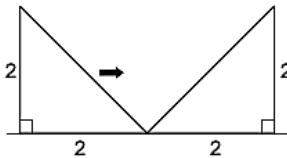


Figura 1

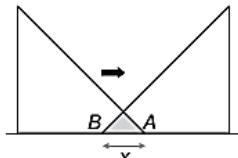


Figura 2

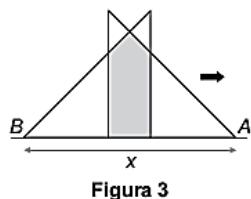
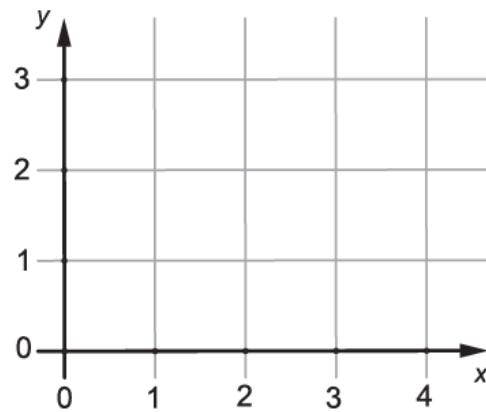


Figura 3

Para cada x no intervalo $[0,4]$, seja $f(x)$ a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

- Calcule $f(1)$ e $f(3)$
- Encontre as expressões de f nos intervalos $[0,2]$ e $[2,4]$ e esboce o seu gráfico.



- Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

GABARITO

Q.1. A

Q.2. D

Q.3. D

Q.4. C

Q.5. C

Q.6. D

Q.7. a) $f(x) = 30$ b) $f(x) = 18$

c) $x \leq 5 : f(x) = -\frac{5x^2}{2} + 20x$

$x \geq 5 : f(x) = 50 - \frac{x^2}{2}$

d) $x = 4$

Q.8. A

Q.9. C

Q.10. E

Q.11. B

Q.12. C

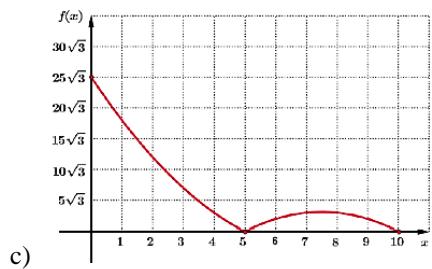
Q.13. C

Q.14. B

Q.15. B

Q.16. E

Q.17. a) $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ b) $x = 5$ e $x = 10$



Q.18. B

Q.19. B

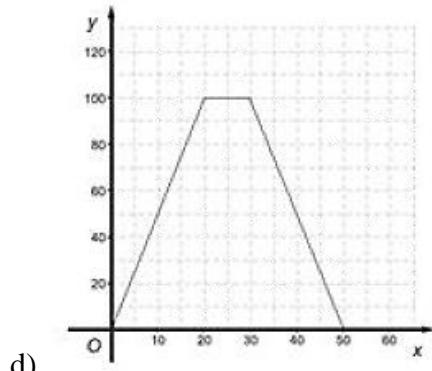
Q.20. D

Q.21. D

Q.22. A

Q.23. D

Q.24. a) 50 cm b) 100 cm² c) 100 cm²



Q.25. C

Q.26. B

Q.27. C

Q.28. D

Q.29. D

Q.30. D

Q.31. A

Q.32. A

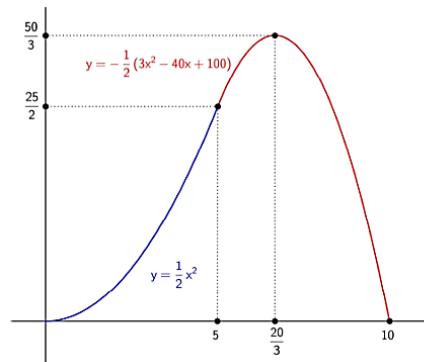
Q.33. D

Q.34. a) $f(2) = 2$; $f(5) = \frac{25}{2}$; $f(7) = \frac{33}{2}$

b) $0 < x \leq 5$ tem-se $f(x) = \frac{x^2}{2}$ e $5 < x < 10$ tem-se

$$f(x) = \frac{1}{2}(-3x^2 + 40x - 100)$$

c)



d) $\frac{50}{3}$

Q.35. D

Q.36. D

Q.37. E

Q.38. A

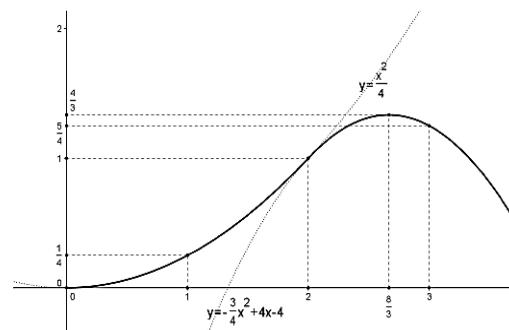
Q.39. C

Q.40.

a) $f(1) = \frac{1}{4}$ e $f(3) = \frac{5}{4}$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{4}x^2 + 4x - 4 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



c) Máx. $\frac{4}{3}$

REFERÊNCIAS

BRASIL. Concurso Canguru de Matemática Brasil. *Canguru de Matemática 2020*. Disponível em: <<https://www.cangurudematematicabrasil.com.br/para-escolas/provas-anteriores>>. Acessado em: 09 jun. 2020.

BRASIL. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. *OBMEP 20209*. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/provas.htm>>. Acessado em: 09 jun. 2020.

LICEU. Olimpíada Interna de matemática Ceep Liceu Parnaibano. *OIM 2020*. Piauí, 2020. Disponível em: <<https://oimliceuparnaibano.wixsite.com/oimliceu>>. Acessado em 09 jun. 2020.

PARANÁ. Olimpíada Paranaense de Matemática. *OPRM 2019*. Paraná, 2019. Disponível em: <<http://www.mat.ufpr.br/opr/>>. Acessado em 09 jun. 2020.

PIAUÍ. Olimpíada Piauiense de Matemática. *OPIM 2019*. Piauí, 2019. Disponível em: <<http://opim.ufpi.br/>>. Acessado em: 09 jun. 2020.